Examen du 28 février 2017 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont interdits. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question précédente sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité de la rédaction, celle-ci doit être complète et synthétique. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(4 points)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$.

1. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes et de même loi que l'on précisera.
2. Déterminer la loi de X/Y.

Exercice 2 *(4 points)*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, toutes deux de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Après avoir donner la densité du couple (X, Y), montrer que la densité de $(X, X + Y)$ est donnée par
$$f_{(X,X+Y)}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mathbf{1}_{[0,y]}(x), \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
2. En déduire la densité de $X + Y$.
3. Soit $v > 0$. Calculer la densité conditionnelle de X sachant $X + Y = v$ puis identifier la loi.
4. En déduire $\mathbf{E}(X|X + Y)$.

Exercice 3 *(4 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli sur $\{-1, 1\}$ de paramètre $p \in (0, 1)$. Autrement dit, $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_1 = -1) = p$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$ alors $(|S_n|)_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.
2. On considère désormais le cas $p = \frac{1}{2}$. Soit $\alpha > 0$.
   (a) Calculer $\mathbf{E}[e^{\alpha X_1}]$ puis $\mathbf{E}[e^{\alpha S_n}]$. En déduire que $\mathbf{E}[(\cosh \alpha)^{-n} e^{\alpha S_n}] = 1$.
   (b) À l'aide de la loi forte des grands nombres montrer que
   $$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{e^{\alpha S_n}}{(\cosh \alpha)^n} \right]^{1/n} = \frac{1}{\cosh \alpha}.$$
   En déduire que $(\cosh \alpha)^{-n} e^{\alpha S_n}$ converge vers 0 *p.s.*.
   (c) Quelle hypothèse n'est pas satisfaite pour que dans ce cas le théorème de convergence dominée ne soit pas valide ?

Exercice 4 *(3 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe $(\alpha,\lambda)\in(0,\infty)^2$ tels que

$$\mathbf{P}(X_1 > x) \sim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x^\lambda}.$$

La fonction de répartition F d'une loi de Fréchet de paramètre $(\alpha,\lambda)\in(0,\infty)^2$ est donnée pour $t\in\mathbb{R}$ par

$$F(t) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)e^{-\alpha y^{-\lambda}}.$$

Montrer que $Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}}\max(X_1,\ldots,X_n)$ converge en distribution vers une loi de Fréchet.

Exercice 5 *(5 points)*

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ (respectivement $(Y_n)_{n\geq 1}$) une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi commune la loi uniforme sur $[0,1]$ (respectivement de loi de Poisson de paramètre $\alpha>0$).

1. La loi faible des grands nombres $\mathbf{L}^2$ s'applique-t-elle à la suite $(U_n)_{n\geq 1}$? Justifier.

2. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\,dx_1\ldots dx_n.$$

   On pourra montrer que cette intégrale est l'espérance d'une fonctionnelle de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.

3. Montrer que $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\alpha$.

4. Montrer que $(Z_n/n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une limite que l'on précisera.

5. En déduire, pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et bornée, la limite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n}\frac{(\alpha n)^k}{k!}f(k/n).$$