Rattrapage du 6 février 2019 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Questions de cours *(10 points)*

1. Énoncer la loi forte des grands nombres de Kolmogorov.
2. Énoncer le théorème central limite multivarié.
3. Énoncer le lemme de Slutsky.
4. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires réelles toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle définie également sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X.
   (a) Que peut-on dire sur la suite $(F_{X_n})_{n\geq 0}$ des fonctions de répartition de X_n ?
   (b) Que peut-on dire sur la suite des fonctions caractéristiques $(\phi_{X_n})_{n\geq 0}$?
   (c) Sous quelle condition a-t-on $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)]$?
5. Énoncer le deuxième lemme de Borel-Cantelli.
6. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que la loi de X_i, $i = 1, \ldots, n$, est à densité f_i. Exprimer la densité du vecteur $(X_1, \ldots, X_n)$.
7. Qu'est-ce qu'un vecteur gaussien ?
8. Définir *simplement* la loi du chi-deux à d degrés de liberté.

Exercice 1 *(3 points)*

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On s'intéresse à la *v.a.* $X^+ = \max(X, 0)$.

1. Que vaut $\int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\delta_0(x)$? Une justification complète est attendue.
2. À l'aide de la caractérisation par des fonctions tests, montrer que la loi de X^+ est un mélange d'une masse de Dirac en 0 et d'une loi à densité qu'on déterminera.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X^+.

Exercice 2 *(2 points)*

Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de *v.a. i.i.d.* et N une *v.a.* à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_k)_{k\geq 1}$. On suppose que $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$ et $\mathbf{E}(N^2) < \infty$. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Calculer la foncton caractéristique de S_N.
2. En déduire $\mathbf{E}(S_N)$.

Exercice 3 *(2 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe $(\alpha, \lambda) \in (0, \infty)^2$ tels que

$$\mathbf{P}(X_1 > x) \sim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x^\lambda}.$$

La fonction de répartition F d'une loi de Fréchet de paramètre $(\alpha, \lambda) \in (0, \infty)^2$ est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t) e^{-\alpha t^{-\lambda}}.$$

Montrer que $Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \ldots, X_n)$ converge en distribution vers une loi de Fréchet.

Exercice 4 *(3 points)*

Soient X_1, X_2 et X_3 trois *v.a.r.* gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $U = 2X_1 - X_2 - X_3$, $V = X_1 + X_2 + X_3$ et $W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$.

1. Déterminer les lois de U, V et W. Parmi les couples suivants, lesquels sont indépendants : (U, V), (U, W), (V, W) ? Justifier.
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $W = aU + Z$ où Z est indépendante de U. En déduire $\mathbf{E}(W|U)$.