Rattrapage du 1er mars 2018 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Question de cours *(2 points)*

Énoncer la (une) loi des grands nombres et le théorème central limite.

Exercice 1 *(6 points)*

La densité de la loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $c > 0$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{\alpha}{c}\left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha+1}\mathbf{1}_{]c,\infty[}(x).$$

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $c > 0$.

1. Vérifier que h définit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X_1.
3. On note $m_n = \min\{X_k : 1 \leq k \leq n\}$.
   (a) Montrer que m_n suit une loi de Pareto dont on déterminera les paramètres.
   (b) En déduire
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k > \frac{3}{2}c\}\right).$$
4. On suppose désormais que $\alpha = 1$. On note
   $$N_n = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{]3c/2,\infty[}(X_k).$$
   (a) Déterminer la loi de N_n.
   (b) Calculer $\mathbf{P}(N_n \geq 2)$.

Exercice 2 *(3 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* définies sur un même espace proabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On suppose de plus que $X \in \mathbf{L}^2$. Pour $n \geq 2$, on définit

$$Y_n = \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j}{\binom{n}{2}}.$$

1. Justifier la convergence presque-sûre de $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)_{n\geq 1}$. Déterminer sa limite.
2. Que peut-on en déduire sur $\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right)_{n\geq 1}$? Pourquoi ?
3. En développant $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$, montrer que $(Y_n)_{n\geq 2}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X_1)^2$.

Exercice 3 *(5 points)*

Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction de répartition. Soit $p > 0$. On définit $G_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$G(x) = \frac{1}{p} \int_x^{x+p} F(\xi)\, d\xi.$$

1. Montrer que G est une fonction de répartition.

2. Montrer que la loi caractérisée par G est diffuse.

3. Montrer que la loi caractérisée par G est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 4 *(5 points)*

Soient U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même lois gaussienne centrée réduite.

1. Le but de cette question est de calculer la valeur de $\mathbf{E}(\max(U,V))$.
   (a) Pourquoi $U\mathbf{1}_{U>V}$ et $V\mathbf{1}_{V>U}$ sont elles égales en distribution ?
   (b) Montrer que $\mathbf{E}[\max(U,V)] = 2\mathbf{E}[U\mathbf{1}_{U>V}]$.
   (c) En déduire que $\mathbf{E}[\max(U,V)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

2. Soit $W \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendant du vecteur $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

   (a) Soit $\rho \in [0,1]$. On définit le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ par

   $$\begin{cases} X = U\sqrt{1-\rho} + W\sqrt{\rho} \\ Y = V\sqrt{1-\rho} + W\sqrt{\rho} \end{cases}.$$

   Montrer que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien dont on précisera l'espérance et la matrice de covariance.

   (b) Déduire des questions précédantes que $\mathbf{E}[\max(X,Y)] = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$.