Partiel du 28 novembre 2016 - 1h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont interdits. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question précédente sans pour autant l'avoir démontré. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité de la rédaction, celle-ci doit être complète et synthétique. Le barème est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 *(2 points)*

Soient $X_1, \cdots, X_n$, $n \geq 1$, des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer en utilisant les fonctions caractéristiques que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

La loi normale est dite α-stable d'indice $\alpha = 2$.

Exercice 2 *(6 points)*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\beta_I(a,b)$ et $\beta_I(a+b,c)$ pour $a,b,c > 0$. On rappelle que la densité d'une loi $\beta_I(a,b)$ est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

On cherche à montrer que $U = (XY)$ suit une loi $\beta_I(a, b+c)$. On rappelle également que

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \quad \text{et} \quad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

1. Donner la densité du couple (X,Y).
2. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, la densité $f_{(U,V)}$ du couple $(U,V) = (XY, Y)$.
3. Justifier que la densité f_U de $U = XY$ est donnée par la forme intégrale suivante

$$f_U(u) = \frac{1}{B(a,b)B(a+b,c)} \mathbf{1}_{[0,1]}(u) u^{a-1} \int_u^1 (v-u)^{b-1}(1-v)^{c-1}\,dv.$$

4. Conclure à l'aide d'un changement variable (unidimensionnel).

Exercice 3 *(6 points)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit ϕ le C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$ dans $\mathbb{R}_*^2$ défini par $\phi(u,v) = (\sqrt{u}\cos(v), \sqrt{u}\sin(v))$. On pose $(U,V) = \phi^{-1}(X,Y)$. On se propose d'étudier la loi du couple (U,V).

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Exprimer $\mathbf{E}(g \circ \phi^{-1}(X,Y))$ en fonction des densités de X et Y notées f_X et f_Y respectivement.
2. À l'aide du changement de variable $(x,y) = \phi(u,v)$, montrer que

$$\mathbf{E}(g(U,V)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v) \frac{e^{-u/2}}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u) \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{(0,2\pi)}(v)\,dudv.$$

3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer les lois de U et de V.
5. Déterminer la loi de $1 - \exp(-U/2)$.
6. Proposer une procédure permettant de simuler des paires de nombres aléatoires distribués selon une loi normale centrée réduite dans le plan à partir d'une source de nombres aléatoires de loi uniforme. Cette méthode est appelée méthode de Box-Müller.

Exercice 4 *(6 points)*

Soient X et Y deux variables aléatoires positives de carré intégrable définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\alpha \in (0,1)$.

1. Sous quelle condition a-t-on $\mathbf{E}(X^2) = 0$? Dans la suite une telle situation est supposée exclue.
2. En considérant la fonction $\lambda \to \mathbf{E}[(X + \lambda Y)^2]$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\mathbf{E}(XY)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2).$$
3. Montrer que pour tout $\alpha \in (0,1)$
$$(1-\alpha)\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{[\alpha\mathbf{E}(X),\infty)}(X)).$$
4. En déduire
$$\mathbf{P}(X \geq \alpha\mathbf{E}(X)) \geq (1-\alpha)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$