Examen du 21 décembre 2017 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Question de cours *(2 points)*

Fabien a malencontreusement laissé échapper un feuillet de son cours dans la marre de l'Ensai. Aussi a-t-il perdu l'énoncé d'un lemme très important. Saurez-vous l'aider à le retrouver ?

Lemme de ....:
....,
alors $\big((X_n, Y_n)\big)_{n\geq 1}$ converge en loi vers (X, c).

Exercice 1 *(6 points)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit ϕ le C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$ dans $\mathbb{R}_*^2$ défini par $\phi(u,v) = (\sqrt{u}\cos(v), \sqrt{u}\sin(v))$. On pose $(U,V) = \phi^{-1}(X,Y)$. On se propose d'étudier la loi du couple (U,V).

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Exprimer $\mathbf{E}(g \circ \phi^{-1}(X,Y))$ en fonction des densités de X et Y notées f_X et f_Y respectivement.
2. À l'aide du changement de variable $(x,y) = \phi(u,v)$, montrer que
$$\mathbf{E}(g(U,V)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\frac{e^{-u/2}}{2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{(0,2\pi)}(v)\ dudv.$$
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer les lois de U et de V.
5. Déterminer la loi de $1 - \exp(-U/2)$.
6. Proposer une procédure permettant de simuler une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.

Exercice 2 *(6 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (définies sur un même espace probabilisé), indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable. On note $m = \mathbf{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}(X_1) > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad M_n = \frac{S_n}{n}, \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - m\right).$$

1. (a) Justifier brièvement la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ et préciser sa limite.
   (b) Montrer que la suite $(M_n + m)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers $2m$.
   (c) En déduire que la suite $\big(\sqrt{n}(M_n^2 - m^2)\big)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $m \in \mathbb{R}$.
   (a) Justifier l'égalité
$$f(M_n) = f(m) + (M_n - m)f'(m) + (M_n - m)\varepsilon(M_n - m), \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

(b) Montrer que la suite $\left(\sqrt{n}(M_n - m)\varepsilon(M_n - m)\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.

(c) En déduire que la suite $\left(\sqrt{n}(f(M_n) - f(m))\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi. Retrouve-t-on le résultat de la question 1.(c) ?

Exercice 3 *(6 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes centrées. On suppose, pour tout $n \geq 1$, que X_n est à valeurs dans $\{-2^n, -1, 1, 2^n\}$ et vérifie

$$\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = -2^n) = \mathbf{P}(X_n = 2^n) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On note pour tout $n \geq 1$

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

1. Pourquoi ne peut-on pas appliquer la loi des grands nombres pour montrer la convergence presque sûre de $(M_n)_{n\geq 1}$ vers 0 ?

2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbf{1}_{|X_n|\leq 1}$.

   (a) Déterminer la loi de Y_n, puis sa moyenne et sa variance.

   (b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{V}(Y_n)}{n^2} < \infty$. Puis en utilisant un théorème sur les séries aléatoires, montrer que la série (aléatoire) de terme général Y_n/n converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

   (d) Montrer que $\mathbf{P}(\liminf\{X_n = Y_n\}) = 1$.

   (e) Conclure.