

Partiel du 28 novembre 2017 - 1h30

Le sujet comporte 2 pages. Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont **interdits**. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être **justifié** de manière **complète et synthétique**. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.

Exercice 1 (5 points)

1. La fonction f est clairement positive. On calcule

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^{1/2} 6e^{-3} e^{6x} dx = 6e^{-3} \left[\frac{e^{6x}}{6} \right]_{-\infty}^{1/2} = 1.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité.

2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, alors, en faisant le changement de variable $y = 1 - 2x$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g(Y)] &= \mathbf{E}[g(1 - 2X)] = \int_{-\infty}^{1/2} g(1 - 2x) 6e^{-3} e^{6x} dx \\ &= \int_0^{\infty} g(y) 3e^{-3y} dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) 3e^{-3y} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(y) dy. \end{aligned}$$

On identifie la densité de Y et on conclut que $Y \sim \mathcal{E}(3)$.

3. On doit calculer pour $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_Y(t) = \mathbf{E}(e^{itY}) = 3 \int_0^{\infty} e^{ity-3y} dy = \frac{3}{3 - it}.$$

4. On va calculer l'espérance et la variance en utilisant la densité de Y et sa fonction caractéristique. On a en intégrant par parties

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^{\infty} 3xe^{-3x} dx = \int_0^{\infty} x d(-e^{-3x}) = [xe^{-3x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-3x} dx = 1/3.$$

De même, on calcule

$$\mathbf{E}(Y^2) = \int_0^{\infty} 3x^2 e^{-3x} dx = \int_0^{\infty} x^2 d(-e^{-3x}) = [x^2 e^{-3x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-3x} dx = 2/3 \times 1/3 = 2/9.$$

Ainsi, $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = 2/9 - 1/9 = 1/9$.

Avec les fonctions caractéristiques, on commence par évaluer les dérivées premières et secondes en 0 :

$$\phi'_Y(0) = \frac{3i}{(3 - it)^2} \Big|_{t=0} = i/9 \quad \text{et} \quad \phi''_Y(0) = \frac{-6}{(3 - it)^3} \Big|_{t=0} = -2/9.$$

On utilise ensuite les relations

$$i\mathbf{E}(Y) = \phi'_Y(0) \quad \text{et} \quad -\mathbf{E}(Y^2) = -\phi''_Y(0),$$

puis on conclut de la même façon que précédemment.

Exercice 2 (5 points)

1. Il existe plusieurs façons de répondre à ces questions, nous proposons ici d'utiliser le formalisme linéaire.

- (a) On remarque que $X_1 = (1 \ 0 \ 0)X$. Cela montre que X_1 est une variable aléatoire gaussienne comme transformation linéaire d'un vecteur gaussien. Sa loi est donc complètement caractérisée par son espérance et sa variance. Or,

$$\mathbf{E}(X_1) = (1 \ 0 \ 0) \mathbf{E}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_1) = (1 \ 0 \ 0) \Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Ainsi, $X_1 \sim \mathcal{N}(1, 1)$.

- (b) Cette fois-ci, $X_2 + X_3 = (0 \ 1 \ 1)X$. De façon analogue, il vient que $X_2 + X_3$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne et de variance donnée par

$$\mathbf{E}(X_2 + X_3) = 7 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_2 + X_3) = 13.$$

- (c) Encore une fois $2X_1 + X_2 + X_3 = (2 \ 1 \ 1)X$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne

$$\mathbf{E}(2X_1 + X_2 + X_3) = 9 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(2X_1 + X_2 + X_3) = 21.$$

2. Toujours par le même argument, $2X_1 + X_2 - X_3$ est une variable aléatoire gaussienne. Son espérance est égale à 5. La probabilité qu'une gaussienne soit inférieure à sa moyenne est 1/2.

3. Il s'agit de calculer l'espérance et la matrice de covariance du vecteur gaussien Y :

$$\mathbf{E}(Y) = A\mu = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Cov}(Y) = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (8 points)

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Pour tout $a > 0$, la fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

La fonction f est positive. En faisant le changement de variable $y = \lambda x$, on calcule

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1} e^{-y}}{\Gamma(a)} dy = 1.$$

2. On calcule

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda \Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{a+1}}{\Gamma(a+1)} x^a e^{-\lambda x} dx = \frac{a}{\lambda},$$

en reconnaissant la densité d'une $\Gamma(a+1, \lambda)$.

Pour calculer la variance, par une méthode similaire, on calcule d'abord le moment d'ordre 2

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a+1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2 \Gamma(a)} = \frac{(a+1)a}{\lambda^2},$$

d'où l'on déduit $\mathbf{V}(X) = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}$.

N'existant pas de notation universelle pour la loi Gamma, il est courant de parler de loi Gamma de moyenne a/λ et de variance a/λ^2 levant ainsi toute ambiguïté.

3. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, on calcule la loi de Y en faisant le changement de variable $y = \lambda x$. On obtient

$$\mathbf{E}[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda x) f(x) dx = \int_0^\infty g(y) \frac{y^{a-1} e^{-y}}{\Gamma(a)} dy.$$

En identifiant la densité, il vient que $Y \sim \Gamma(a, 1)$.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$.

(a) Comme X et Y sont indépendantes, la densité du couple est le produit des densités de X et Y :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} y^{b-1} e^{-\lambda(x+y)} \mathbf{1}_{[0, \infty]^2}(x, y).$$

(b) On utilise la caractérisation de la loi à l'aide de fonctions tests. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive et on fait le changement de variable $(u, v) = \phi(x, y) = (x + y, x/(x + y))$. La fonction ϕ est bijective de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$ et ϕ^{-1} se calcule en résolvant le système (non linéaire)

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = uv \\ y = u(1 - v) \end{cases}$$

Ainsi, $(x, y) = \phi^{-1}(u, v) = (uv, u(1 - v))$. On calcule la valeur absolue du déterminant de la jacobienne, on obtient

$$|\det D\phi^{-1}(x, y)| = \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{pmatrix} \right| = |-uv - u + uv| = |u|.$$

Finalement, la formule du changement de variable donne

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[g(U, V)] &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x + y, x/(x + y)) f_X(x) f_Y(y) \, dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 g(u, v) \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a+b-1} e^{-\lambda u} v^{a-1} (1-v)^{b-1} \, dudv. \end{aligned}$$

En identifiant, il vient que la densité de (U, V) est donnée par

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} e^{-\lambda u} v^{a-1} (1-v)^{b-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u) \mathbf{1}_{]0,1[}(v).$$

- (c) La densité de (U, V) étant à variables séparées, donc les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
- (d) En toute généralité, connaissant la loi du couple, on peut calculer la loi des marginales en intégrant contre l'autre variable. Ici, on peut identifier les lois marginales directement : on reconnaît pour U la densité d'une $\Gamma(a + b, \lambda)$ et pour V la densité d'une loi $B(a, b)$.