Examen du 21 décembre 2017 - 2h30

Question de cours *(2 points)*

C'est le lemme de Slutsky du cours.

Exercice 1 *(6 points)*

1. Comme X et Y sont indépendantes, il vient que

$$\mathbf{E}[g \circ \phi^{-1}(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g \circ \phi^{-1}(x,y) f_X(x) f_Y(y)\ dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} g \circ \phi^{-1}(x,y) e^{-(x^2+y^2)/2}\ \frac{dxdy}{2\pi}.$$

2. L'application ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}_*^2$. On fait le changement de variable $(x,y) = \phi(u,v)$, on calcule

$$|\mathsf{det}\ J_\phi(u,v)| = \left| \mathsf{det} \begin{pmatrix} \frac{\cos(v)}{2\sqrt{u}} & -\sqrt{u}\sin(u) \\ \frac{\sin(v)}{2\sqrt{u}} & \sqrt{u}\cos(v) \end{pmatrix} \right| = 1/2.$$

Ainsi,

$$\mathbf{E}(g(U,V)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v) \frac{e^{-u/2}}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u) \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{(0,2\pi)}(v)\ dudv.$$

3. On identifie la densité du couple (U,V) et on remarque qu'elle est à variables séparées donc U et V sont indépendantes.

4. On reconnaît pour U une loi exponentielle de paramètre $1/2$ et pour V une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$

5. On calcule à l'aide du changement de variable $s = 1 - \exp(-u/2)$ avec $du = 2(1-s)^{-1}\ ds$:

$$\mathbf{E}[g(1 - e^{-U/2})] = \int_0^\infty g(1 - e^{-u/2}) \frac{e^{-u/2}}{2}\ du = \int_0^1 g(s) \frac{2(1-s)}{2(1-s)}\ ds.$$

On déduit que $1 - e^{-U/2}$ suit une loi uniforme sur $]0,1[$.

6. Pour résoudre ce problème, il suffit de se donner un couple de variables aléatoire (S,T) indépendantes et toute deux de loi uniforme sur $]0,1[$. Puis, on pose $U = -2\log(1-S)$ et $V = T$, puis $(X,Y) = \phi(U,V)$. Enfin, par indépendance de X et Y, en projettant sur la première coordonnée X, on obtient une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. La variable aléatoire voulue est finalement $m + \sigma X$.

Exercice 2 *(6 points)*

1. (a) La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ étant *i.i.d.* et $X_1 \in \mathbf{L}^2$, on peut appliquer le TCL et on obtient la convergence en loi de T_n vers une variable aléatoire $G \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

   (b) Par la loi forte des grand nombres de Kolmogorov, M_n converge presque sûrement vers m et donc $M_n + m$ converge presque sûrement vers $2m$.

   (c) Pour tout $n \geq 1$, $W_n = \sqrt{n}(M_n^2 - m^2) = \sqrt{n}(M_n - m)(M_n + m) = T_n(M_n + m)$.
   Or, T_n converge en loi vers G et $M_n + m$ converge presque sûrement, donc en probabilité vers $2m$. Par le lemme de Slutsky et par continuité de l'application $(x,y) \to xy$, la suite W_n converge en loi vers $2mG$. De plus $2mG \sim \mathcal{N}(0, 4m^2\sigma^2)$.

2. (a) C'est le développement de Taylor de f à l'ordre 1.

   (b) La suite T_n converge en loi vers G et $\varepsilon(M_n - m)$ vers 0 presque sûrement, donc en probabilité. Une nouvelle application du lemme de Slutsky donne la convergence en loi de $\sqrt{n}(M_n - m)\varepsilon(M_n - m)$ vers 0. Or la convergence en loi vers une constante implique la convergence en probabilité, d'où le résultat.

(c) C'est encore une fois une application du lemme de Slutsky. La loi limite est alors la loi de $f'(m)G$, *i.e.* une $\mathcal{N}(0, [f'(m)]^2\sigma^2)$. Notons que si $f'(m) = 0$, alors la variance limite est nulle, la limite est une constante presque sûre et on déduit en réalité une convergence en probabilité.

Exercice 3 *(6 points)*

1. Les variables aléatoires X_n ne sont pas identiquement distribué.

2. (a) Pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}(Y_n = -1) = \mathbf{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ et $\mathbf{P}(Y_n = 0) = \frac{1}{2^n}$. On déduit que $Y_n \in \mathbf{L}^2$ (elle est bornée presque sûrement par 1) et

$$\mathbf{E}(Y_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y_n) = \mathbf{E}(Y_n^2) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

(b) Comme $\mathbf{V}(Y_n) \leq 1$, on déduit que $\sum_{n\geq 1} \mathbf{V}(Y_n)/n^2 < \infty$. De plus, $(Y_n/n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de carré intégrable, centrées et $\mathbf{V}(Y_n/n) = \mathbf{V}(Y_n)/n^2$ qui est sommable. Le théorème des séries centrées implique que la série de terme général Y_n/n converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$.

(c) Le lemme de Kronecker implique que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k = 0$.

(d) Comme

$$\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X_n \neq Y_n) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(X_n = \pm 2^n) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} < \infty,$$

le premier lemme de Borel-Cantelli implique que $\mathbf{P}(\limsup\{X_n \neq Y_n\}) = 0$ et donc, par passage au complémentaire, $\mathbf{P}(\liminf\{X_n = Y_n\}) = 1$.

(e) Ainsi, avec probabilité 1, $X_n = Y_n$ sauf peut-être pour nombre fini de $n \geq 1$. Plus précisément, il existe $N(\omega)$ tel que $N < \infty$ presque sûrement et pour tout $n \geq N(\omega)$, $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - Y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^N X_k.$$

Le terme à droite tend vers 0 presque sûrement lorsque n tend vers l'infini ce qui montre le résultat voulu.