

Rattrapage du 1er mars 2018 - 2h

Le sujet comporte 2 pages Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont **interdits**. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être **justifié** de manière **complète et synthétique**. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.

Exercice 1 (3 points)

Soient Ω un ensemble et $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partition de Ω , i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ et $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

- Rappeler la définition d'une tribu.
- Montrer que $\mathcal{F} = \{\cup_{j \in J} A_j : J \subset \mathbb{N}\}$ est une tribu sur Ω . (On rappelle la convention pour $J = \emptyset$: $\cup_{j \in \emptyset} A_j = \emptyset$).

Exercice 2 (3 points)

On munit $[0, 1]$ de la tribu de Borel notée $\mathcal{B}([0, 1])$. On rappelle que la mesure de comptage ν est définie pour tout $A \in \mathcal{B}([0, 1])$ par

$$\nu(A) = \begin{cases} \text{card } A & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit h une fonction mesurable positive sur $[0, 1]$ telle que $\int_{[0,1]} h \, d\nu < \infty$. On pose $B_n = \{x \in [0, 1] : h(x) > 1/n\}$ et $B = \{x \in [0, 1] : h(x) > 0\}$.

- Pourquoi B_n et B sont-ils des boréliens ?
- À l'aide d'une inégalité classique, montrer que l'on peut trouver $K \geq 0$ telle que $\nu(B_n) \leq Kn$.
- En déduire que B est au plus dénombrable.

Exercice 3 (6 points)

En justifiant, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$(i) \ u_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \sin(x/n) \, dx ; \quad (ii) \ u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{t^2}+1}{ne^{2t^2}+4t^2} \, dt ; \quad (iii) \ u_n = \int_0^\infty \frac{ne^{-x}}{nx+1} \, dx.$$

Exercice 4 (8 points)

- En utilisant le développement en série entière de $s \rightarrow (1-s)^{-1}$, montrer, en énonçant clairement le théorème utilisé, que

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

- Le but de cette question est de montrer que

$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On considère le changement de variables $(x, y) = \phi(u, v) = \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}, \frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)$.

- Vérifier que $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire inversible.
- Calculer ϕ^{-1} et représenter graphiquement $\Delta = \phi^{-1}([0, 1]^2)$.

(c) Montrer que

$$I = 4 \underbrace{\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du}_{=I_1} + 4 \underbrace{\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} \right) du}_{=I_2}.$$

(d) Calculer I_1 et I_2 .

Cette méthode de calcul est dûe à T. Apostol dans [1].

References

- [1] Tom M. Apostol, A proof that Euler Missed: Evaluating $\zeta(2)$ the Easy Way, Math. Intelligencer, 5, 1983, 59–60.