Rattrapage du 1er mars 2018 - 2h

Le sujet comporte 2 pages *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(3 points)*

Soient Ω un ensemble et $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ une partition de Ω, *i.e.*, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ et $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

1. Rappeler la définition d'une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{F} = \{\cup_{j\in J} A_j : J \subset \mathbb{N}\}$ est une tribu sur Ω. *(On rappelle la convention pour $J = \emptyset$: $\cup_{j\in\emptyset} A_j = \emptyset$).*

Exercice 2 *(3 points)*

On munit $[0,1]$ de la tribu de Borel notée $\mathcal{B}([0,1])$. On rappelle que la mesure de comptage ν est définie pour tout $A \in \mathcal{B}([0,1])$ par

$$\nu(A) = \begin{cases} \mathsf{card}\ A & \text{si} \quad A \quad \text{est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit h une fonction mesurable positive sur $[0,1]$ telle que $\int_{[0,1]} h\, d\nu < \infty$. On pose $B_n = \{x \in [0,1] : h(x) > 1/n\}$ et $B = \{x \in [0,1] : h(x) > 0\}$.

1. Pourquoi B_n et B sont-ils des boréliens ?
2. À l'aide d'une inégalité classique, montrer que l'on peut trouver $K \geq 0$ telle que $\nu(B_n) \leq Kn$.
3. En déduire que B est au plus dénombrable.

Exercice 3 *(6 points)*

En justifiant, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\text{(i) } u_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \sin(x/n)\, dx\,; \qquad \text{(ii) } u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{t^2}+1}{ne^{2t^2}+4t^2}\, dt\,; \qquad \text{(iii) } u_n = \int_0^\infty \frac{ne^{-x}}{nx+1}\, dx.$$

Exercice 4 *(8 points)*

1. En utilisant le développement en série entière de $s \to (1-s)^{-1}$, montrer, en énoncant clairement le théorème utilisé, que
$$\int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$
2. Le but de cette question est de montrer que
$$I = \int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = \frac{\pi^2}{6}.$$
On considère le changement de variables $(x,y) = \phi(u,v) = \left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}, \frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)$.
   (a) Vérifier que $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire inversible.
   (b) Calculer ϕ^{-1} et représenter graphiquement $\Delta = \phi^{-1}([0,1]^2)$.
   (c) Montrer que
$$I = \underbrace{4\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_0^u \frac{dv}{2-u^2+v^2}\right) du}_{=I_1} + \underbrace{4\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2}-u} \frac{dv}{2-u^2+v^2}\right) du}_{=I_2}.$$
   (d) Calculer I_1 et I_2.

Cette méthode de calcul est dûe à T. Apostol dans [1].

Références

[1] Tom M. Apostol, A proof that Euler Missed : Evaluating $\zeta(2)$ the Easy Way, Math. Intelligencer, 5, 1983, 59–60.