Examen du 19 octobre 2017 - 2h

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(2 points)*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $B \in \mathcal{X}$ tel que $0 < \mu(B) < \infty$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{X}$,

$$\mu(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

1. Montrer que $\mu(\cdot|B)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.
2. Supposons à présent que μ est la mesure géométrique de paramètre $1/2$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k.$$

   Soit $B = 2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs. Calculer $\mu(B)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mu(\{k\}|B)$. En déduire que

$$\mu(\cdot|B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} \delta_{2k}.$$

Exercice 2 *(4 points)*

L'objectif de cet exercice est de montrer l'égalité

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

1. Justifier que la fonction $x \to 1/x^x \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$ est intégrable.
2. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^n}{n!}\, dx.$$

3. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^n (\ln x)^m \, dx.$$

   Montrer, par récurrence sur m, que

$$I_{m,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

   On pourra commencer par faire le changement de variables $x = e^{-y}$.

4. Conclure.

Exercice 3 *(2 points)*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $(B_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$.

1. Montrer que

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k\geq n} B_k\right).$$

2. En déduire que

$$\sum_{n\geq 0} \mu(B_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} B_k\right) = 0.$$

Problème 4 *(12 points)*

Soit f une fonction continue, positive, intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $\mathbb{R} \ni x \to u(t,x) \in \mathbb{R}$ est continue, positive, intégrable (toujours par rapport à la mesure de Lebesgue) et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{R}_+^* \ni t \to u(t,x) \in \mathbb{R}_+$ est continûment différentiable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée partielle $\partial_t u$ (on se contentera d'en donner une forme intégrale).
   (c) Calculer (sans justifier) la dérivée partielle seconde $\partial^2_{xx} u$ de la fonction u par rapport à x. Quel est le lien entre $\partial^2_{xx} u$ et $\partial_t u$?

2. Dans cette partie, on suppose de plus que $\|f\|_\infty < \infty$ (*La fonction f étant supposée continue, $\|\cdot\|_\infty$ est la norme sup d'une fonction continue).*
   (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $x \to u(t,x)$ est bornée.
   (b) Montrer que la fonction u peut également s'écrire

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} : \quad u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + y\sqrt{t}) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

   (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = f(x)$.
   (d) Montrer que la fonction u est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\partial^2_{xx} u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ \lim_{t\to 0^+} u(t,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   (e) Une fonction positive et Lebesgue intégrable est-elle bornée sur $\mathbb{R}$? On donnera une preuve ou un contre-exemple de cette assertion.
   (f) **(Bonus)** Montrer que le résultat de la question 2.(c) reste valide pour la convergence en norme $\|\cdot\|_1$ si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$.