Correction du rattrapage du 1er mars 2018 - 2h

Exercice 1 *(3 points)*

On vérifie les trois points de la définition d'une tribu :

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$: À l'aide la convention rappelée dans l'énoncé et puisque $\emptyset \subset \mathbb{N}$
$$\emptyset = \bigcup_{j \in \emptyset} A_j \in \mathcal{F}.$$
2. Stabilité par passage au complémentaire : Soit $B \in \mathcal{F}$ alors $B = \cup_{j\in J} A_j$ pour un certain sous-ensemble $J \subset \mathbb{N}$. Puisque $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une partition de Ω,
$$B^{\complement} = \Omega \setminus B = \bigcup_{j \in J^{\complement}} A_j,$$
et donc $B^{\complement} \in \mathcal{F}$.
3. Stabilité par union dénombrable : Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des ensembles de $\mathcal{F}$. Alors pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il existe $J_i \subset \mathbb{N}$ tel que $B_i = \cup_{j\in J_i} A_j$. Il vient
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in J_i} A_j = \bigcup_{j\in J} A_j,$$
avec $J = \cup_{i\in\mathbb{N}} J_i$.

Exercice 2 *(3 points)*

1. Pour tout $n \geq 1$, on peut écrire $B_n = h^{-1}(]1/n, \infty[)$ si bien que B_n est l'image réciproque d'un ouvert, donc d'un borélien, par une application mesurable, B_n est donc un borélien. De même $B = h^{-1}(]0, \infty[)$.
2. Comme h est ν-intégrable, l'inégalité de Markov implique
$$\nu(B_n) = \nu(\{h > 1/n\}) \leq n \int_{[0,1]} h \, d\nu.$$
3. Il est immédiat que $B = \cup_{n\geq 1} B_n$ et par la question précédente B_n est de cardinal fini. Donc B est réunion dénombrable d'ensembles finis, il est dénombrable.

Exercice 3 *(6 points)*

(i) On applique le théorème de convergence dominée. D'une part, on calcule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+x^2} \sin(x/n) = \frac{x}{1+x^2}.$$
D'autre part, comme $0 \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0,1]$, on obtient
$$0 \leq \frac{n}{1+x^2} \sin(x/n) \leq \frac{x}{1+x^2} = g(x),$$
pour tout $n \geq 1$. Or g est bornée sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$. Ainsi,
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{\ln 2}{2}.$$

(ii) Encore une fois, nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée avec la domination
$$\left| \frac{ne^{t^2} + 1}{ne^{2t^2} + 4t^2} \right| = \left| \frac{e^{t^2} + 1/n}{e^{2t^2} + 4t^2/n} \right| \leq \left| e^{-t^2}(1 + e^{-t^2}) \right| \leq 2e^{-t^2}.$$
On obtient donc
$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}.$$

(iii) On applique le lemme de Fatou (les fonctions sont positives) et on obtient

$$\infty = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} \frac{ne^{-x}}{nx+1}\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} u_n.$$

La plus petite valeur d'adhérence de u_n est $+\infty$, d'où l'on déduit $\lim u_n = \infty$.

Exercice 4 *(8 points)*

1. Le développement en série entière donne pour tout $s \in [0,1[$:

$$\frac{1}{1-s} = \sum_{n\geq 0} s^n.$$

On remarque si $x, y \in [0,1)$ alors $xy \in [0,1)$ si bien que

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n\geq 0} x^n y^n$$

presque partout sur $[0,1]^2$. De plus, la fonction $[0,1[^2 \ni (x,y) \longrightarrow (1-xy)^{-1}$ est positive, d'où par le théorème de Tonelli

$$\int_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{1-xy} = \int_{[0,1]^2} \sum_{n\geq 0} x^n y^n \; dxdy = \sum_{n\geq 0} \int_{[0,1]^2} x^n y^n \; dxdy = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

2. On renvoit à [1].

Références

[1] Tom M. Apostol, A proof that Euler Missed : Evaluating $\zeta(2)$ the Easy Way, Math. Intelligencer, 5, 1983, 59–60.