

## Examen du 18 octobre 2018 - 2h

**Le sujet comporte 2 pages.** Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont **interdits**. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être **justifié** de manière **complète et synthétique**. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.

### Exercice 1 (3 points)

1. Soit  $n \geq 1$  alors

$$|f_n(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{x^{2-\frac{1}{n}}} \mathbf{1}_{(0,1)} + \frac{1}{x^2} \mathbf{1}_{[1,\infty)}$$

qui est positive d'intégrale finie sur  $(0, \infty)$  : la singularité en 0 est de l'ordre  $x^{1-1/n}$  et cette fonction décroît en  $x^2$  en l'infini.

2. (a) Il est immédiat que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) = \frac{\sin(x)}{2x^2} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$  et  $|f_n(x)| \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) \leq \frac{|\sin(x)|}{x^2} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$  qui est intégrable. Donc le théorème de convergence dominée implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty f_n(x) \lambda(dx) = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{2x^2} \lambda(dx) = \frac{S}{2}.$$

- (b) On commence par décomposer

$$\int_0^\infty f_n(x) \lambda(dx) = \int_0^1 f_n(x) \lambda(dx) + \int_1^\infty f_n(x) \lambda(dx).$$

On a déjà montré la convergence du deuxième terme. Considérons le premier terme. La fonction  $f_n(x) \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$  étant positive, le lemme de Fatou implique

$$\infty = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{2x^2} \lambda(dx) = \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \lambda(dx) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \lambda(dx).$$

### Exercice 2 (5 points)

1. Montrons tout d'abord que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour ce faire, on doit vérifier trois points :
- la fonction  $t \rightarrow e^{-x^2} \cos(2tx)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ;
  - la fonction  $x \rightarrow e^{-x^2} \cos(2tx)$  est intégrable pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ;
  - enfin,  $|-2xe^{-x^2} \sin(2tx)| \leq 2|x|e^{-x^2}$  qui est intégrable.

Le théorème de dérivation sous le signe somme implique  $F$  est dérivable et

$$F'(t) = - \int_{\mathbb{R}} 2xe^{-x^2} \sin(2tx) dx.$$

Nous devons montrer que  $F'$  est continue. Là encore, il est nécessaire de vérifier trois points :

- la fonction  $t \rightarrow -2xe^{-x^2} \sin(2tx)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ;
- la fonction  $x \rightarrow -2xe^{-x^2} \sin(2tx)$  est mesurable pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ;
- enfin,  $|-2xe^{-x^2} \sin(2tx)| \leq 2|x|e^{-x^2}$  qui est intégrable.

Ainsi,  $F'$  est continue sur  $\mathbb{R}$  si bien que  $F$  est  $C^1$ .

2. Nous avons déjà calculé  $F'$ , puis une intégration par parties

$$F'(t) = - \int_{\mathbb{R}} 2xe^{-x^2} \sin(2tx) dx = \int_{\mathbb{R}} \sin(2tx) d(e^{-x^2}) = \left[ \sin(2tx)e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - 2t \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2tx) dx.$$

Il vient immédiatement que  $F'(t) + 2tF(t) = 0$ .

3. (a) On pose  $(x, y) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = \phi(\rho, \theta)$ . La fonction  $\phi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $(0, \infty) \times (0, \frac{\pi}{2})$  dans  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Puis, on calcule le Jacobien de  $\phi$  :

$$\text{Jac } \phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \implies |\det \text{Jac } \phi(\rho, \theta)| = |\rho|.$$

La formule de changement de variable implique

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{-\rho^2} d\theta d\rho = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

- (b) Nous avons par Fubini pour les fonctions mesurables positives

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = F(0)^2.$$

On en déduit  $F(0) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$  — notons que l'on choisit la racine positive car on sait  $F(0) \geq 0$  comme l'intégrale d'une fonction positive.

- (c) Nous avons  $F'(t) + 2tF(t) = 0$  donc

$$F(t) = F(0)e^{-\int_0^t 2s ds} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}e^{-t^2}.$$

### Exercice 3 (4 points)

1. Soit  $x > 0$ , on calcule

$$\int_0^\infty e^{-xy} dy = \left[ -\frac{e^{-xy}}{x} \right]_0^\infty = \frac{1}{x}.$$

2. Soit  $A > 0$ , et par Fubini pour les fonctions  $\mathbf{L}^1$

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^A \sin(x) \int_0^\infty e^{-xy} dy dx = \int_0^\infty \int_0^A \sin(x) e^{-xy} dx dy.$$

3. (a) Soient  $y > 0$  et  $A > 0$ , on calcule

$$\begin{aligned} \int_0^A \sin(x) e^{-xy} dx &= \int_0^A \text{Im } e^{ix-xy} dx = \text{Im} \left[ \frac{e^{ix-xy}}{i-y} \right]_0^A \\ &= \text{Im} \frac{e^{A(i-y)} - 1}{i-y} = -\frac{\cos(A)e^{-Ay} - 1 + y \sin(A)e^{-Ay}}{1+y^2}. \end{aligned}$$

- (b) Nous avons par définition d'une intégrale impropre puis par la question 2.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^A \sin(x) e^{-xy} dx dy.$$

Or, nous avons pour tout  $y > 0$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \sin(x) e^{-xy} \mathbf{1}_{[0,A]}(x) = \sin(x) e^{-xy} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

et

$$|\sin(x) e^{-xy} \mathbf{1}_{[0,A]}(x)| \leq |\sin(x)| e^{-xy} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

qui est intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ , aussi le théorème de convergence dominée implique

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^A \sin(x) e^{-xy} dx dy &= \int_0^\infty \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \sin(x) e^{-xy} dx dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} dy = [\arctan(x)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

#### Exercice 4 (8 points)

1. Comme  $O_a \subset A$ , il vient que  $\lambda(O_a) \leq \lambda(A)$ . Puis, en majorant brutalement

$$\lambda(A) \leq \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^q 2 \frac{a^q}{q} = \sum_{q=1}^{\infty} 2a^q = \frac{2a}{1-a}.$$

2. L'ensemble  $K_a$  n'est rien d'autre que le complémentaire  $O_a$  dans  $[0, 1]$  i.e.  $K_a = [0, 1] \setminus O_a$ , ainsi, puisque  $\lambda(O_a) < \infty$ , on obtient  $\lambda(K_a) = 1 - \lambda(O_a)$ . De la question précédente, il vient l'estimation suivante  $\lambda(K_a) \geq 1 - \frac{2a}{1-a} = \frac{1-3a}{1-a}$ . Donc  $\lambda(K_a) > 0$  dès que  $a > 1/3$ .
3. Si  $x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ , alors il existe  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  premiers entre eux tels que  $x = p/q$  et puisque  $x \in (0, 1)$ ,  $p \in \{1, \dots, q\}$ . Aussi,  $x \in A \cap (0, 1) = Q_a$ .
4. Si on suppose que  $K_a$  contient un intervalle ouvert alors cet ouvert intersecte  $\mathbb{Q}$  car  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . De là, on déduit que  $K_a \cap O_a \neq \emptyset$  puisque  $O_a$  contient tous les rationnels de  $(0, 1)$ . C'est une contradiction.
5. L'ensemble  $A$  est une réunion (dénombrable) d'intervalles ouverts donc  $O_a$  est ouvert comme l'intersection de deux ouverts. Quant à  $K_a$  c'est l'intersection du fermé  $[0, 1]$  avec le complémentaire d'un ouvert, c'est un fermé. Il est borné puisque dans  $[0, 1]$ .

Nous avons donc construit un ensemble compact qui ne contient aucun intervalle ouvert et qui est pourtant de mesure strictement positive.

